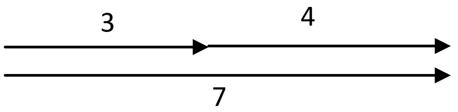
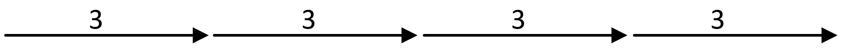
Eine kleine Entdeckungsreise in die Mathematik 23.07.2024

Grundlage der Mathematik sind Zahlen. Zahlen definieren entweder eine Reihenfolge oder die Größe von Mengen. Eine grundlegende Operation mit Zahlen ist die **Addition**:



3 + 4 = 7

Eine weitere Operation ist die **Multiplikation**:



4 * 3 = 12

Dabei ist die Multiplikation nur eine Vereinfachung einer wiederholten Addition:
4 * 3 = 3 + 3 + 3 + 3

Eine weitere Operation ist das **Potenzieren**:
$4^3 = 64$
Wieder ist das Potenzieren nur eine Vereinfachung einer wiederholten Multiplikation:
$4^3 = 4 * 4 * 4$

Warum geht das nicht weiter?
Eine weitere Operation wäre zum Beispiel eine wiederholte Potenz:
$((4^2)^2)^2 = (16^2)^2 = 256^2$
Diese Operation könnte „**Superpotenz**" genannt werden.
Es geht noch weiter:
Die wiederholte Superpotenz. Wie könnte der Name dafür sein? Wie könnte das dargestellt werden?

Vorschlag:
Addition: a + b (so wie bisher, Addition der 1. Stufe)
Multiplikation: a ++ b (Addition der 2. Stufe)
Potenzierung: a +++ b (Addition der 3. Stufe)
„Superpotenz": a ++++ b oder a (4+) b (Addition der 4. Stufe)
wiederholte „Superpotenz": a +++++ b oder a (5+) b (Addition der 5. Stufe)
…
allgemein: die Addition der n. Stufe: a (n+) b

Eine Gleichung zur Reduzierung der Additionsstufe um 1 Stufe sieht so aus:

$$a\ (n+)\ b\ = \underbrace{a\ ([n-1]+)\ a\ ([n-1]+)\ a\ \ldots}_{\text{b mal}}$$

Damit kann jeder Ausdruck auf eine Addition der 1. Stufe zurück geführt werden.
Beispiel: 3 (5+) 4 = 3 (4+) 3 (4+) 3 (4+) 3

Auch Summen (∑) und Produkte (∏) könnten verallgemeinert werden:
die Summe der ersten Stufe: die übliche Summe: a + a + …
die Summe der zweiten Stufe: das Produkt: a * a * …
die Summe der dritten Stufe: die Potenz $((a)^a)^a$ …
…
die Summe der n. Stufe: a (n+) a (n+) …

Als Zeichen könnte verwendet werden: K (Kappa)
K(n,a,b) = a (n+) b (n+) a …   b mal

Damit sieht die Gleichung zur Reduzierung der Additionsstufe so aus:

a (n+) b = K(n-1, a, b)

Beispiel: 3 (5+) 4 = K(4,3,4) = 3 (4+) 3 (4+) 3 (4+) 3

Die Vorteile der Addition, Multiplikation und Potenzierung sind bekannt:
Arithmetik, Algebra, lineare Gleichungen, Polynome, etc.

Aber warum gibt es diese Operatoren? Die Addition alleine würde doch reichen!
Der menschliche Verstand braucht diese Zwischenstufen.
Beispiel: Der Ausdruck: $3*4^3 + 4*5^2 + 2*3 + 12$ würde auf Additionen beschränkt so aussehen:
3*4*4*4 + 4*5*5 + 2*3 + 12 =
(4+4+4)*4*4 + (5+5+5+5)*5 + 3+3 + 12 =
((4+4+4)+(4+4+4)+(4+4+4)+(4+4+4))*4 + (5+5+5+5)+(5+5+5+5)+(5+5+5+5)+(5+5+5+5)+(5+5+5+5) + 3+3 + 12 =
((4+4+4)+(4+4+4)+(4+4+4)+(4+4+4)) + ((4+4+4)+(4+4+4)+(4+4+4)+(4+4+4)) +
((4+4+4)+(4+4+4)+(4+4+4)+(4+4+4)) + ((4+4+4)+(4+4+4)+(4+4+4)+(4+4+4)) +
(5+5+5+5)+(5+5+5+5)+(5+5+5+5)+(5+5+5+5)+(5+5+5+5) + 3+3 + 12
Sehr unhandlich!

Aber welche Vorteile haben noch höhere Stufen der Addition?

Es gibt diese Vorteile bestimmt; diese kommen aber erst zu Tage, wenn sie angewendet werden. Angewendet werden sie aber erst, wenn die Vorteile ersichtlich sind.

Einer muss daher den Anfang machen:
Transformation der Reisaufgabe von der Potenzierung (Verdopplung) zur „Superpotenz“ (Quadrierung):

Die Aufgabe mit den Reiskörnern auf einem Schachbrett:
Auf dem 1. Feld liegt ein Reiskorn, auf dem 2. Feld zwei Reiskörner, auf dem 3. Feld vier Reiskörner und dann auf dem nächsten Feld immer das Doppelte des vorigen Feldes.
Auf dem Feld n liegen daher $2^{(n-1)}$ Reiskörner.
Eine Wertetabelle:

```
n:    1 2 3 4 5  6
Reis: 1 2 4 8 16 32
```

Mit der „Superpotenz“ sähe diese Aufgabe so aus:
Auf dem 1. Feld liegen zwei Reiskörner, auf dem zweiten Feld vier Reiskörner und auf den folgenden Feldern immer das Quadrat des vorherigen Feldes.
Auf dem Feld n liegen dann 2 ++++ n Reiskörner!
Eine Wertetabelle:

```
n:    1 2 3  4   5     6
Reis: 2 4 16 256 65536 4294967296
```

Das Kommutativgesetz:

für die Addition lautet: $a + b = b + a$
für die Multiplikation lautet: $a * b = b * a$
für das Potenzieren lautet: $a^b = b^a$? Nein!
Warum gilt das Kommutativgesetz nicht für Potenzen?
Die Addition findet auf einem eindimensionalen Zahlenstrahl statt.
Die Multiplikation kann als eine zweidimensionale Fläche aufgefasst werden.
Das Potenzieren kann aber nicht als dreidimensional betrachtet werden; eher als multidimensional, abhängig von der Potenz.

Vermutung 1: der einzige Fall für das Kommutativgesetz beim Potenzieren ist:

$2^4 = 4^2$

Vermutung 2: in allen höheren Stufen der Addition $n>3$ gilt immer:
$a \ (n+) \ b \neq b \ (n+) \ a$